CÁLCULO (GRUPO 2F3M-A)
20-3-2013

TIPO A

1. Halle la ecuación del plano tangente a la gráfica de la función $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ en el punto $(1,-1,f(1,-1)) = (1,-1,1)$.
2. Calcule, si existen, las derivadas parciales en $(0,0)$ de la función
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 + x^3 + xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$
3. Estudie si la función f del ejercicio anterior es diferenciable en $(0,0)$.
4. La función $f(x,y) = 100 - ((x-1)^2 + y^2)$ modeliza la altitud de una montaña de forma que el norte viene indicado por la dirección y sentido del vector $(0,1)$. Un montañero se encuentra en el lugar representado por el punto $(0,-1,f(0,-1)) = (0,-1,95)$ y quiere ascender hacia la cumbre por el camino más corto, ¿qué dirección debe tomar? ¿Cuál es la pendiente en esa dirección? Si desde ese mismo punto desea pasear por un camino que mantenga la altitud, ¿qué dirección debe tomar?

CÁLCULO (GRUPO 2F3M-A)
20-3-2013

TIPO B

1. Halle la ecuación del plano tangente a la gráfica de la función $f(x,y) = x^3 - xy + 2y^2$ en el punto $(-1,1,f(-1,1)) = (-1,1,2)$.
2. Calcule, si existen, las derivadas parciales en $(0,0)$ de la función
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y + y^3 + y^4}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$
3. Estudie si la función f del ejercicio anterior es diferenciable en $(0,0)$.
4. La función $f(x,y) = 100 - (x^2 + y^2)$ modeliza la altitud de una montaña de forma que el norte viene indicado por la dirección y sentido del vector $(0,1)$. Un montañero se encuentra en el lugar representado por el punto $(-1,1,f(-1,1)) = (-1,1,98)$ y quiere ascender hacia la cumbre por el camino más corto, ¿qué dirección debe tomar? ¿Cuál es la pendiente en esa dirección? Si desde ese mismo punto desea pasear por un camino que mantenga la altitud, ¿qué dirección debe tomar?

TIPO A

1. $f(x,y) = x^2+xy+y^2 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x+y \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,-1) = 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y+x \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,-1) = -1 \end{cases}$

La ecuación del plano tangente a $G(f)$ en $(a,b,f(a,b))$ es:

$$z - f(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\,(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(x-b)$$

En nuestro caso $a=1$, $b=-1$ y $f(a,b)=1$, entonces:

$$z - 1 = (x-1) + (-1)(y+1)$$

$$\boxed{z = x-y-1}$$

2.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+x^3+xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4+x^3}{x^2}-0}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^4+x^3}{x^3} = \lim_{x\to 0} (x+1) = \boxed{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{0}{y^2}-0}{y} = \lim_{y\to 0} 0 = \boxed{0}$$

3. Estudio de la diferenciabilidad de f en $(0,0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,(x-0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot(y-0)\right)}{\|(x,y)-(0,0)\|} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^4+x^3+xy^2}{x^2+y^2} - 0 - x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+x^3+xy^2-x(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\frac{x^4}{(x^2+y^2)^{3/2}} \underset{\substack{x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\,\text{sen}\,\theta}}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{\rho^4\cos^4\theta}{(\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\text{sen}^2\theta)^{3/2}} = \frac{\rho^4\cos^4\theta}{\rho^3} = \rho\cos^4\theta$$

Como $\left.\begin{array}{l} \Phi(\rho)=\rho \underset{\rho\to 0}{\longrightarrow} 0 \\ \Psi(\theta)=\cos^4\theta \text{ acotada} \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0$

Por tanto, $\boxed{f \text{ es diferenciable en } (0,0)}$

(4) $f(x,y) = 100 - ((x-1)^2+y^2))$

Montañero en lugar correspondiente a $(0,-1,95)$.

- Para ascender a la cumbre por el camino más corto debe elegir la dirección y sentido de $\nabla f(0,-1)$ que corresponde a la pendiente máxima, $\|\nabla f(0,-1)\|$. Es decir:

$\nabla f(x,y) = (-2(x-1), -2y) \Rightarrow \nabla f(0,-1) = (2,2)$ DIRECCION NORESTE

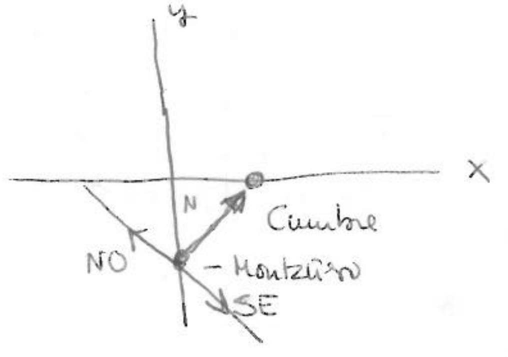
y la pendiente en $(0,-1,95)$ según la dirección noreste es:

$$f'((0,-1);(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})) = \|\nabla f(0,-1)\| = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$$

- Si desea caminar manteniendo la altitud debe elegir una dirección (u,v) tal que $\nabla f(0,-1)\cdot(u,v)=0$:

$0 = \nabla f(0,-1)\cdot(u,v) = (2,2)\cdot(u,v) = 2(u+v) \Longleftrightarrow u=-v$

Podría elegir la dirección y sentido de $(1,-1)$ ó la de $(-1,1)$, esto es, SURESTE o NOROESTE



TIPO B

(1) $f(x,y) = x^3 - xy + 2y^2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(-1,1) = 2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 4y - x \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(-1,1) = 5 \end{cases}$

Entonces

$$z - 2 = 2(x+1) + 5(y-1)$$

$\boxed{z = 2x + 5y - 1}$ es la ecuación del plano tangente a $G(f)$ en $(-1,1,2)$

(2)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y + y^3 + y^4}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{0}{x^2}}{x} = \lim_{x\to 0} 0 = \boxed{0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{y^3+y^4}{y^2} - 0}{y} = \lim_{y\to 0} (1+y) = \boxed{1}$$

(3)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^2y + y^3 + y^4}{x^2+y^2} - 0 - (0(x-0) + 1\cdot(y-0))}{\|(x,y) - (0,0)\|} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y + y^3 + y^4 - y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^4}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0$$

polares (como tipo A)

$\Rightarrow$ $\boxed{f \text{ es diferenciable en } (0,0)}$

(4) $f(x,y) = 100 - (x^2+y^2)$; punto $(-1,1,98)$

- Camino más corto desde $(-1,1,98)$ en dirección de pendiente máxima, esto es, ~~la~~ dirección y sentido de:

$$\nabla f(-1,1) = (-2x, -2y)\Big|_{(x,y)=(-1,1)} = (2,-2) \quad \text{SURESTE}$$

con pendiente $\|\nabla f(-1,1)\| = \|(+2,-2)\| = 2\sqrt{2}$

- Camino con pendiente nula ha de ser perpendicular a $\nabla f(-1,1)$:

$\nabla f(-1,1)\cdot(u,v) = 2u - 2v = 0 \Leftrightarrow u = v \Rightarrow \begin{cases} \text{dir. y sentido } (1,1) \text{ NORESTE} \\ \text{" \quad " } (-1,-1) \text{ SUROESTE} \end{cases}$